正則凸錐の順序同型写像の線型性 (表現論と調和解析における諸問題)

甲斐, 千舟

甲斐, 千舟. 正則凸錐の順序同型写像の線型性 (表現論と調和解析における諸問題). 数理解析研究所講究録 2011, 1770: 87-95

数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 87-95

正則凸錐の順序同型写像の線型性

金沢大学・理工研究域　甲斐 千舟 (Chifune Kai)
Institute of Science and Engineering
Kanazawa University

1. 序

実ベクトル空間Vの中に閉凸錐Cが与えられ, Cは正則である, すなわち$C\cap(-C)=\{0\}$であるとする. このときV上の半順序$\preceq$が

$$x\preceq y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} y-x\in C \qquad (x,y\in V)$$

によって導入される. Vの部分集合S_1からS_2への写像φが全単射, かつφ,φ^{-1}が共に半順序$\preceq$を保つとき, $\varphi\colon S_1\to S_2$を順序同型写像と呼ぶことにする. 本講演で述べる主定理は, 次の通りである.

定理 1.1. Vは有限次元であるとし, Cは半直線を既約成分にもたないとする *(*正確な定義は *§2* を参照*)*. このとき同相写像$\varphi\colon C\to C$が順序同型写像ならば, φはV上の線型写像のCへの制限である.

$C=\mathbb{R}_{\geq 0}$ (非負実数の全体) のときには, 順序同型写像とは単調増加な全単射のことであるから, 明らかに定理の反例が存在する. よって「Cが半直線を既約成分にもたない」という条件が必要になる.

[7, p.1287, Proposition 2] と同様の議論によって, 定理 1.1 から次の結果が従う. φの連続性を要求していないことに注意する.

定理 1.2. Vは有限次元, Cは半直線を既約成分にもたないとし, $D:=\mathrm{int}(C)\neq\emptyset$ *(*すなわち$\mathrm{span}(C)=V$*)* とする. このとき任意の順序同型写像$\varphi\colon D\to D$は, V上の線型写像のDへの制限である.

定理 1.3. Vは有限次元, Cは半直線を既約成分にもたないとし, $\mathrm{int}(C)\neq\emptyset$とする. このとき任意の順序同型写像$\varphi\colon V\to V$は, Cの自己同型を線型部分とする *affine* 写像である.

正則な閉凸錐を扱う際に, それに付随する半順序$\preceq$を関連付けて考察するのは自然なことであると思われる. 講演者もかつて, この半順序に関係するやや専門的な条件によって, 等質錐の成すクラスの中で対称錐を特徴付けた [5]. 最近になって金行壮二氏 [6] は, 対称有界領域の Shilov 境界に入る因果構造に関する定理の系として, Cを対称錐の閉包としたときに定理 1.1 が成立することを示した (因果構造と半順序$\preceq$の関係は §4 で述べる). 講演者はこの結果に興味をもち, 特別な錐である対称錐だけでなく, より一般の錐において同様のことが成立するかどうかという, 基本的な問題を考察することにした.

定理 1.1 がほぼ得られた段階で, 関連する結果がいくつかあることに気付いた. A. D. Alexandrov と V. V. Ovchinnikova は, Lorentz cone

$$C:=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1\geq\sqrt{x_2^2+\cdots+x_n^2}\}$$

を考え, 順序同型写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の線型性を示した [2]. Alexandrov はこれを一般化し, 定理 1.1 と同じ条件を課した C に対して, $\varphi\colon V \to V$ の線型性を示した [1]. これで定理 1.1 も得られるように思われるかもしれないが, 定理 1.1 では V より狭い C 上の情報だけで線型性を導かなければならない. 実際, [2] の証明方法が定理 1.1 の状況に拡張可能かどうか, 明らかではない.

一方で [1] とほぼ同時期に, 等質錐の研究でよく知られる O. S. Rothaus が, 順序同型写像 $\varphi\colon C \to C$ の線型性を示している. この場合の C は無限次元の錐でもよいのだが (コンパクトな底面をもつものに限る), 「C は孤立した extreme ray をもたない」という強い条件が課されている. この条件は半直線を既約成分にもたない対称錐や等質錐では満たされる. しかし, 多角形を底面にもつような錐は排除されてしまう.

定理 1.1 は今のところ有限次元でしか通用しないが, 例えば, $\mathbb{R}^3$ において四角形を底面にもつ錐に適用することができる (例 3.6 を参照). このような意味では, 定理 1.1 は Rothaus の定理の弱点を補完する, と考えられる. また, C よりも local な部分集合上の φ の線型性も証明できるのではないかと思われるが, それは今後の課題である.

定理 1.1 の証明の出発点となるのは, 次の事実である:

- 順序自己同型は extreme ray を extreme ray に写す.
- Minkowski の定理 (定理 3.3) により, C の任意の点は, extreme ray に属する点の和として書ける.
- そしてそのような和で書いたとき, 像はそれぞれの点の像の和となる.

よって, 任意の extreme ray が線型に写されることを証明すれば, 順序自己同型の線型性が従う. こういった着眼点は [7] と同様であるが, そこで C に課されているような強い条件が使えないため, 議論を精密にする必要がある. それが §3.3 にあたる.

2. 定義

V を有限次元の実ベクトル空間とし, $C \subset V$ を閉凸錐とする. C は正則である, すなわち C は直線を含まないとする:

$$C \cap (-C) = \{0\}.$$

V に半順序を入れる:

$$x \preceq y \overset{\text{def}}{\iff} y - x \in C.$$

$S_1, S_2 \subset V$ とし, $\varphi\colon S_1 \to S_2$ を写像とする.

$$\varphi \text{ が順序準同型} \overset{\text{def}}{\iff} x \preceq y \text{ ならば } \varphi(x) \preceq \varphi(y).$$

$$\varphi \text{ が順序同型} \overset{\text{def}}{\iff} \varphi \text{ は全単射, かつ } \varphi, \varphi^{-1} \text{ が順序準同型}.$$

定義 2.1. W を有限次元の実ベクトル空間, $\Omega \subset W$ を錐とする. 錐 $\Omega_1, \Omega_2 \subset W$ が存在して

$$\operatorname{span}\Omega_1 \cap \operatorname{span}\Omega_2 = \{0\}, \qquad \Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

となるとき, Ω は Ω_1 と Ω_2 の直和であると言い,

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$$

と表す. もし Ω が閉で $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$ ならば, Ω_1, Ω_2 は閉であり,

$$\Omega_1,\ \Omega_2 \subset \Omega$$

である. 実際, このとき $0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ となり, $\Omega_j = \Omega \cap \operatorname{span}\Omega_j$ $(j = 1, 2)$ である.

C が半直線を既約成分にもつとは, 次のことを言う: 錐 $C' \subset V$ と $v \in C$ $(v \neq 0)$ が存在して

$$C = C' \oplus \mathbb{R}_{\geq 0} v$$

となる.

3. 主定理 1.1 の証明

V を有限次元の実ベクトル空間とし, $C \subset V$ を正則な閉凸錐とする (C が半直線を既約成分にもたないという条件は, §3.3 まで仮定しない).

3.1. 半直線を既約成分にもたないことの言い換え.

命題 3.1 ([3, Proposition I.1.4]). 次を満たす V 上の線型形式 h が存在する:

$$h(x) > 0 \qquad (x \in C \setminus \{0\}).$$

$P := h^{-1}(1) \cap C$ とおく. P を C の底面と呼ぶことにする. C の任意の ray は P とただ 1 度だけ交わる.

命題 3.2 ([3, Corollary I.1.6]). P はコンパクト.

$e \in P$ が P の extreme point であるとは, 次が成立することをいう:

$$e = \lambda a + (1-\lambda) b,\ a, b \in P,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \Longrightarrow \lambda = 0, 1.$$

P の extreme points 全体を $\mathrm{ext}(P)$ で表す. P の extreme point を通る C の ray を extreme ray と呼ぶ. 容易にわかるように, C の ray l が extreme ray であることは次と同値:

$$x, y \in C,\ x + y \in l \text{ ならば}, x, y \in l.$$

定理 3.3 (Minkowski). K が有限次元ベクトル空間のコンパクト凸集合であれば,

$$K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K)) \qquad (\mathrm{conv} \text{ は凸包を表す}).$$

P はコンパクト凸集合であるから,

$$\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(P)) = P. \tag{3.1}$$

よって次の補題を得る.

補題 3.4. 任意の $u \in C$ は,

$$u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j \qquad (\lambda_j > 0,\ e_j \in \mathrm{ext}(P))$$

の形に書ける.

Extreme ray を用いて, 次のような言い換えができる.

命題 3.5. C が半直線を既約成分にもたないことと, 次のことは同値である:

$$\forall e \in \mathrm{ext}(P),\ e \in \mathrm{span}(\mathrm{ext}(P) \setminus \{e\}). \tag{3.2}$$

例 3.6. $\mathbb{R}^3$ において

$$C_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0\}$$

を考える．C_1 は *3* つの $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の直積であるから，半直線を既約成分にもつ．C_1 は三角形を底面にもち，C_1 の *extreme ray* は

$$\{(x,0,0) \mid x \geq 0\}, \quad \{(0,y,0) \mid y \geq 0\}, \quad \{(0,0,z) \mid z \geq 0\}$$

の *3* 本である．確かに (3.2) は満たされない．

一方で，$\mathbb{R}^3$ において

$$C_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x|,|y|\} \leq z\}$$

を考える．C_2 は四角形を底面にもち，*extreme ray* は

$$\mathbb{R}_{\geq 0}(1,1,1), \quad \mathbb{R}_{\geq 0}(1,-1,1), \quad \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,1,1), \quad \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,-1,1)$$

の *4* 本である．明らかに (3.2) が成立するので，C_2 は半直線を既約成分にもたないことがわかる（実際，半直線を既約成分にもつ *3* 次元の閉凸錐は，C_1 に線型同値である）．

3.2. **Extreme ray への還元.** 同相写像 $\varphi\colon C \to C$ が順序同型写像であるとする．補題 3.9 まで [7] と同様であるが，証明の雰囲気を伝えるために，証明も含めてここに掲載する．

補題 3.7 ([7, p.1285])**.** *Extreme ray* の φ による像は，*extreme ray* である．

Proof. $a,b \in C$ $(a \preceq b)$ に対して，「区間」$I(a,b)$ を

$$I(a,b) := \{x \in V \mid a \preceq x \preceq b\}$$

と定義する．

任意の $e \in \mathrm{ext}(P)$ をとる．$\mathbb{R}_{\geq 0}e$ が extreme ray であることから，

$$\{\lambda e \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} = I(0,e)$$

が従う．φ は順序同型写像であるから，

$$\varphi(I(0,e)) = I(0,\varphi(e))$$

となる．$I(0,e)$ は 1 次元，φ は同相写像であるから，$I(0,\varphi(e))$ も 1 次元である．

もし $\varphi(e)$ が extreme ray の上にないとすると，$I(0,\varphi(e))$ は少なくとも 2 次元となるので，$\varphi(e)$ は extreme ray の上にある．よって

$$I(0,\varphi(e)) = \{\lambda\varphi(e) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

ゆえに

$$\varphi(\{\lambda e \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}) = \{\lambda\varphi(e) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

同様の議論によって，$\varphi(\lambda e)$ $(\lambda \geq 0)$ も同じ extreme ray の上にあることが示される．ゆえに

$$\varphi(\mathbb{R}_{\geq 0}e) = \mathbb{R}_{\geq 0}\varphi(e).$$

□

任意の$u \in C$に対して,

$$\varphi_u(x) := \varphi(u+x) - \varphi(u) \qquad (x \in C)$$

と定義する. $\varphi_u\colon C \to C$も同相写像であり, かつ順序同型写像である. よって補題3.7より, Pの任意の extreme point eに対して, 連続関数$\rho(\cdot, e, u)\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$と$P$の extreme point $E(e,u)$が存在して,

$$\varphi_u(\lambda e) = \rho(\lambda, e, u)E(e,u) \qquad (\lambda \geq 0)$$

となる (記法は [7] に従った). φ_uの定義より, 次のように書くこともできる:

$$\varphi(u+\lambda e) - \varphi(u) = \rho(\lambda, e, u)E(e,u) \qquad (\lambda \geq 0). \tag{3.3}$$

次の補題を証明する前に, "exposed ray"を導入する. $\widetilde{e} \in P$がPの exposed point であるとは, 次が成立することをいう:

$$\exists \alpha\colon V \text{ 上の線型形式 s.t. } \alpha(x) > 0 \ (x \in P \setminus \{\widetilde{e}\}),\ \alpha(\widetilde{e}) = 0.$$

Pの exposed points の全体は, ext(P)の中で稠密であることが知られている.

補題 3.8 ([7, p.1285]). $e \in \mathrm{ext}(P)$, $u \in C$とする. このとき$E(e,u)$はuに依らず, eのみで決まる.

Proof. まず, $E(e,u)$が exposed point であるときを考える. このとき次のようなV上の線型形式αが存在する:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &\geq 0 \quad (x \in C), \\ \alpha(x) = 0 &\iff x = \lambda E(e,u) \quad (\lambda \geq 0). \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$とする. $u + \lambda e \succeq \lambda e$より,

$$\varphi(u+\lambda e) \succeq \varphi(\lambda e).$$

(3.3) より, これはすなわち

$$\varphi(u) + \rho(\lambda, e, u)E(e,u) \succeq \rho(\lambda, e, 0)E(e, 0).$$

ゆえに, $\alpha(E(e,u)) = 0$より,

$$\alpha(\varphi(u)) \geq \rho(\lambda, e, 0)\alpha(E(e,0)).$$

左辺はλに依らない. $\lambda \to \infty$のとき$\rho(\lambda, e, 0) \to \infty$であるから, $\alpha(E(e,0)) = 0$でなければならない. ゆえに$E(e,u) = E(e,0)$.

$E(e,u)$が exposed point でない場合には, $E(e,u)$に近づくPの exposed point の列を作って, 議論すればよい. □

以後, $E(e,u)$を単に$E(e)$と書く.

補題 3.9 ([7, p.1286]). $u \in C$を任意とし, e, fをPの相異なる *extreme points* とする. このとき

$$\rho(\lambda, e, u) = \rho(\lambda, e, u + \eta f) \qquad (\lambda, \eta \geq 0)$$

が成り立つ.

Proof. φ は全単射であり, e と f が相異なるので, $E(e)$ と $E(f)$ も相異なる. (3.3) より,

$$\begin{aligned}\varphi(u+\lambda e+\eta f) &= \varphi(u+\lambda e)+\rho(\eta, f, u+\lambda e)E(f)\\ &= \varphi(u)+\rho(\lambda, e, u)E(e)+\rho(\eta, f, u+\lambda e)E(f)\\ &= \varphi(u)+\rho(\eta, f, u)E(f)+\rho(\lambda, e, u+\eta f)E(e).\end{aligned}$$

$E(e)$ と $E(f)$ は一次独立であるから, 係数を比較して主張の等式を得る. □

命題 3.10. $u \in C$ を任意とし, $e_1, \dots, e_k$ を相異なる P の *extreme points* とすると, 任意の $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ に対して,

$$\varphi_u(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j) = \sum_{j=1}^{k} \rho(\lambda_j, e_j, u)E(e_j) \ \left(= \sum_{j=1}^{k} \varphi_u(\lambda_j e_j)\right)$$

が成立する.

Proof. 任意の $2 \leq i \leq k$ に対し, 補題 3.9 を繰り返し使うと,

$$\rho(\lambda_i, e_i, u+\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j) = \rho(\lambda_i, e_i, u).$$

よって,

$$\begin{aligned}\varphi_u(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j) &= \varphi(u+\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j) - \varphi(u)\\ &= \varphi(u+\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j e_j) + \rho(\lambda_k, e_k, u+\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j e_j)E(e_k) - \varphi(u)\\ &= \varphi_u(\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j e_j) + \rho(\lambda_k, e_k, u)E(e_k).\end{aligned}$$

これを繰り返して, 目標の式を得る. □

3.3. $\rho(\cdot, e, 0)$ **の線型性.** C が半直線を既約成分にもたないと仮定する. 任意の $e_0 \in \mathrm{ext}(P)$ をとる. C は半直線を既約成分にもたないので, 命題 3.5 より,

$$e_0 \in \mathrm{span}(\mathrm{ext}(P) \setminus \{e_0\}).$$

よって, 一次独立な $e_1, \dots, e_m \in \mathrm{ext}(P) \setminus \{e_0\}$ と $\mu_1, \dots, \mu_m$ が存在して,

$$e_0 = \sum_{j=1}^{m} \mu_j e_j \tag{3.4}$$

と書ける. $e_0, \dots, e_m$ は平面 $\{h(x) = 1\}$ 上にあるから,

$$1 = h(e_0) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j h(e_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j.$$

よって $\mu_1, \dots, \mu_m$ のいずれかは正である. 添え字を付け替えて $\mu_1 > 0$ としておく. また φ は同相写像であるから, 命題 3.10 より $E(e_1), \dots, E(e_m)$ も一次独立である.

次の補題は, 定理 1.1 の証明の重要な部分を成す. 命題 3.10 などを用いて証明される.

補題 3.11.

$$E(e_0) \in \mathrm{span}\{E(e_1), \ldots, E(e_m)\}$$

が成立する．そこで

$$E(e_0) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j E(e_j)$$

とすると，$\gamma_1 > 0$ となる．さらに任意の $u \in C$, $t \geq 0$ に対し，

$$\gamma_1 \rho(t, e_0, u) = \rho(t\mu_1, e_1, u).$$

補題 3.11 より，関数 $\rho(\cdot, e_0, u)$ と $\rho(\cdot, e_1, u)$ の「比例定数」γ_1, μ_1 は，e_0, e_1 のみで決まり，u には依存しない．これはすなわち関数 $\rho(\cdot, e_0, \mathbf{0})$ の「均質性」を示唆する．実際，次のことが導ける．

命題 3.12. $\rho(\cdot, e_0, 0)$ は線型である．

よって任意の $e \in \mathrm{ext}(P)$, $t \geq 0$ に対して，

$$\varphi(te) = t\varphi(e).$$

3.4. **C における φ の線型性.** 補題 3.4 と命題 3.10 を用いて extreme ray の議論に還元し，命題 3.12 を用いることによって，φ の「C 上での線型性」が得られる:

命題 3.13. 任意の $u, v \in C$ に対して，$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.

[7, p.1287] と同様の議論により，φ は $\mathrm{span}(C)$ 上の線型写像に一意的に拡張される．実際，次のようにすればよい．任意の $x \in \mathrm{span}(C)$ は

$$x = \sum_{j=1}^{k} \nu_j v_j \qquad (\nu_j \in \mathbb{R}, v_j \in C)$$

と書ける．ν_j の正負で分けることにより，

$$x = x_1 - x_2 \qquad (x_1, x_2 \in C)$$

となる．このとき

$$\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$$

とおく．これが well-defined であることは容易に確かめられる．この $\widetilde{\varphi}$ が，φ の $\mathrm{span}(C)$ 上への線型な拡張である．

さらに $\widetilde{\varphi}$ を V 上に線型に拡張すれば，定理 1.1 の証明が完結する．

4. 因果構造との関係

有限次元の実ベクトル空間の正則な閉凸錐を，因果錐と呼ぶ．

定義 4.1. C を $\mathbb{R}^n$ の中の因果錐，M を n 次元多様体，TM を M の接束とする．因果錐の族 $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in M}$ $(C_p \subset T_pM)$ が与えられているとする．このとき $\mathcal{C}$ が C をモデル錐とする因果構造 *(causal structure)* であるとは，次のことをいう:

$$\exists\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}: TM \text{ の局所自明化 } s.t.\ \phi_i(p, C) = C_p\ (p \in U_i).$$

また M の微分同相写像 g が

$$g_* C_p = C_{g(p)} \qquad (p \in M)$$

を満たすとき, g を M の因果自己同型と呼ぶ.

V を有限次元の実ベクトル空間, $C \subset V$ を因果錐, $S \subset V$ を開集合とする. $p \in S$ に対し, T_pS を V と同一視し, $C_p := C$ と定義することにより, S 上の因果構造 $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in S}$ が得られる.

C の双対錐を $C^\sharp$ で表す:

$$C^\sharp := \{f \in V^* \mid \forall x \in C, \langle x, f\rangle \geq 0\}. \tag{4.1}$$

このとき [3, Theorem I.1.1] より, $C^\sharp$ の双対錐は C と一致する. すなわち,

$$C = \{x \in V \mid \forall f \in C^\sharp, \langle x, f\rangle \geq 0\}. \tag{4.2}$$

命題 4.2. 微分同相写像 $\psi\colon S \to S$ が順序同型写像ならば, ψ は因果自己同型である.

Proof. 任意の $x \in S$, $v \in C \subset V \simeq T_xS$ をとる. 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して, $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ を

$$\gamma(t) := x + tv$$

で定義する. 任意の $f \in C^\sharp$ をとる. $d\psi_x(v) = \frac{d}{dt}\psi(\gamma(t))|_{t=0}$ であるから,

$$\langle d\psi_x(v), f\rangle = \frac{d}{dt}\langle \psi(\gamma(t)), f\rangle\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\langle \psi(\gamma(t)) - \psi(\gamma(0)), f\rangle\bigg|_{t=0}.$$

$t \geq 0$ のとき $\gamma(t) \succeq \gamma(0)$ だから, 順序同型写像 ψ で写すと,

$$\psi(\gamma(t)) - \psi(\gamma(0)) \in C.$$

よって (4.1) より $\langle d\psi_x(v), f\rangle \geq 0$ となる. $f \in C^\sharp$ は任意であったから, (4.2) より $d\psi_x(v) \in C$. ゆえに

$$d\psi_x(C) \subset C$$

が示された. ψ^{-1} に対して同様に議論することにより, $d\psi_x(C) = C$ が従うので, ψ は因果自己同型である. □

補題 4.3. $\psi\colon S \to S$ を因果自己同型とする. もし $v, w \in S$ で $v \preceq w$, かつ v と w を結ぶ線分が S に含まれるならば, $\psi(v) \preceq \psi(w)$ である.

Proof. $u := w - v \in C$ とおく. $\gamma\colon [0,1] \to S$ を

$$\gamma(t) := v + tu$$

で定義する. 任意の $f \in C^\sharp$ をとる.

$$g(t) := \langle \psi(\gamma(t)) - \psi(v), f\rangle \qquad (t \in [0,1])$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \langle \frac{d}{dt}\psi(\gamma(t)), f\rangle \\ &= \langle d\psi_{\gamma(t)}(\frac{d}{dt}\gamma(t)), f\rangle = \langle d\psi_{\gamma(t)}(u), f\rangle. \end{aligned}$$

ψ は因果自己同型であるから, $u \in C$ より $d\psi_{\gamma(t)}(u) \in C$. よって (4.1) より,

$$g'(t) \geq 0 \qquad (t \in (0,1)).$$

$g(0) = 0$ より

$$g(t) \geq 0 \qquad (t \in [0, 1]).$$

よって

$$\langle \psi(w) - \psi(v), f \rangle = g(1) \geq 0.$$

$f \in C^\sharp$ は任意であったから, (4.2) より $\psi(w) - \psi(v) \in C$. すなわち

$$\psi(v) \preceq \psi(w).$$

□

補題 4.3 より, 次の命題が従う.

命題 4.4. 任意の $v \in S$ に対して $v + C \subset S$ であるとする. このとき任意の因果自己同型 $\psi \colon S \to S$ は順序同型写像である.

よって, 特に $S = V$ or $\mathrm{int}(C)$ のときには, 順序同型写像と因果自己同型の概念は一致する.

5. 謝辞

本講演の際に落合啓之氏 (九州大学) から有益な助言を頂いた. この場を借りて感謝申し上げたい.

References

[1] A. D. Alexandrov, *A contribution to chronogeometry*, Canad. J. Math. **19** (1967), 1119–1128.
[2] A. D. Alexandrov and V. V. Ovchinnikova, *Notes on the foundations of relativity theory*, Vestnik Leningrad Univ. **11** (1953), 95.
[3] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
[4] C. Kai, *Linearity of order isomorphisms of regular cones*, preprint.
[5] ———, *A characterization of symmetric cones by an order-reversing property of the pseudoinverse maps*, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 1107–1134.
[6] S. Kaneyuki, *Automorphism groups of causal Makarevich spaces*, preprint.
[7] O. S. Rothaus, *Order isomorphisms of cones*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 1284–1288.

〒920-1192 石川県金沢市角間町 金沢大学理工研究域
E-mail address: `kai@staff.kanazawa-u.ac.jp`